EX 1 BAC Juin 2025 Métropole

L'objet de cet exercice est l'étude de l'arrêt d'un chariot sur un manège, à partir du moment où il entre dans la zone de freinage en fin de parcours.
On note t le temps écoulé, exprimé en seconde, à partir du moment où le chariot arrive sur la zone de freinage.
On modélise la distance parcourue par le chariot dans la zone de freinage, exprimée en mètre, en fonction de t, à l'aide d'une fonction notée d définie sur $[0\ ;\ +\infty[$.
On a ainsi $d(0) = 0$.
Par ailleurs, on admet que cette fonction d est dérivable sur son ensemble de définition.
On note d' sa fonction dérivée.

Partie A

Sur la figure (Fig. 2) ci-dessous, on a tracé dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_d$ de la fonction d ;
- la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_d$ au point A d'abscisse 4,7 ;
- l'asymptote Δ à $\mathcal{C}_d$ en $+\infty$.

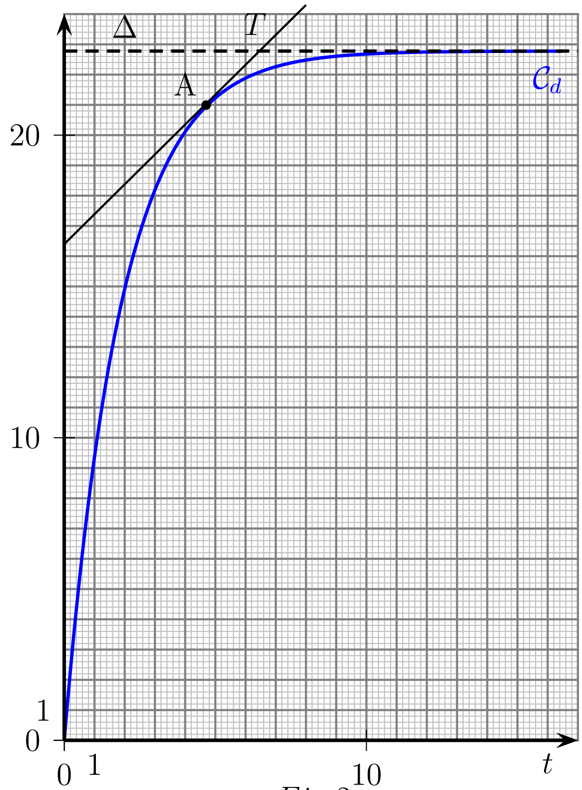

Fig.2

Dans cette partie, aucune justification n'est attendue.

Avec la précision que permet le graphique, répondre aux questions ci-dessous.
D'après ce modèle :

1. Au bout de combien de temps le chariot aura-t-il parcouru 15 m dans la zone de freinage ?
2. Quelle longueur minimale doit-être prévue pour la zone de freinage ?
3. Que vaut $d'(4,7)$? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On rappelle que t désigne le temps écoulé, en seconde, à partir du moment où le chariot arrive sur la zone de freinage.
On modélise la vitesse instantanée du chariot, en mètre par seconde (m.s^{-1}), en fonction de t, par une fonction v définie sur $[0\ ;\ +\infty[$.
On admet que :

- la fonction v est dérivable sur son ensemble de définition, et on note v' sa fonction dérivée ;
- la fonction v est une solution de l'équation différentielle

  $$(E) : \quad y' + 0,6y = \mathrm{e}^{-0,6t},$$

  où y est une fonction inconnue et où y' est la fonction dérivée de y.
  On précise de plus que, lors de son arrivée sur la zone de freinage, la vitesse du chariot est égale à 12 m.s^{-1}, c'est-à-dire $v(0) = 12$.

1. **a.** On considère l'équation différentielle

   $$(E') : \quad y' + 0,6y = 0.$$

   Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E') sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   b. Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = t\mathrm{e}^{-0,6t}$.
   Vérifier que la fonction g est une solution de l'équation différentielle (E).

   c. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   d. En déduire que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on a :

   $$v(t) = (12 + t)\mathrm{e}^{-0,6t}.$$

2. Dans cette question, on étudie la fonction v sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   a. Montrer que pour tout réel $t \in [0\ ;\ +\infty[$, $v'(t) = (-6,2 - 0,6t)\mathrm{e}^{-0,6t}$.

   b. En admettant que :

   $$v(t) = 12\mathrm{e}^{-0,6t} + \frac{1}{0,6} \times \frac{0,6t}{\mathrm{e}^{0,6t}},$$

   déterminer la limite de v en $+\infty$.

   c. Étudier le sens de variation de la fonction v et dresser son tableau de variation complet. Justifier.

d. Montrer que l'équation $v(t) = 1$ admet une solution unique α, dont on donnera une valeur approchée au dixième.

3. Lorsque la vitesse du chariot est inférieure ou égale à 1 mètre par seconde, un système mécanique se déclenche permettant son arrêt complet.
Déterminer au bout de combien de temps ce système entre en action. Justifier.

Partie C

On rappelle que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$:

$$v(t) = (12+t)\mathrm{e}^{-0{,}6t}.$$

On admet que pour tout réel t dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$:

$$d(t) = \int_0^t v(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que la distance parcourue par le chariot entre les instants 0 et t est donnée par :

$$d(t) = \mathrm{e}^{-0{,}6t}\left(-\frac{5}{3}t - \frac{205}{9}\right) + \frac{205}{9}.$$

2. On rappelle que le dispositif d'arrêt se déclenche lorsque la vitesse du chariot est inférieure ou égale à 1 mètre par seconde.
Déterminer, selon ce modèle, une valeur approchée au centième de la distance parcourue par le chariot dans la zone de freinage avant le déclenchement de ce dispositif.

EX 1

Partie A

1. Graphiquement on lit que $f(2) = 15$: le chariot a parcouru 15 m en 2 secondes.
2. L'équation d Δ a une équation $y = k$, avec $k < 23$.
   Une zone de 23 m de longueur semble suffisante.
3. La tangente en A contient les points de coordonnées (0 ; 16,5) et (4,7 ; 21). Son coefficient directeur est donc égal à : $\dfrac{21-16,5}{4,7-0} = \dfrac{4,5}{4,7} \approx 0,96$.

Partie B

1. **a.** On considère l'équation différentielle

$$(E') : \quad y' + 0,6y = 0.$$

On sait que les solutions de cette équation (homogène) sont les fonctions définies sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$t \longmapsto f(t) = K\mathrm{e}^{-0,6t}, \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

b. Si g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(t) = t\mathrm{e}^{-0,6t}$, alors
$g'(t) = \mathrm{e}^{-0,6t} - 0,6t\mathrm{e}^{-0,6t} = \mathrm{e}^{-0,6t}(1 - 0,6t)$.
Calculons $g'(t) + 0,6g(t) = \mathrm{e}^{-0,6t}(1-0,6t) + 0,6 \times t\mathrm{e}^{-0,6t} = \mathrm{e}^{-0,6t}(1 - 0,6t + 0,6t) = \mathrm{e}^{-0,6t} \times 1 = \mathrm{e}^{-0,6t}$.
Comme $g'(t) + 0,6g(t) = \mathrm{e}^{-0,6t}$, g est bien une solution particulière de l'équation (E).

c. On sait qu'alors les solutions de l'équation (E) sont les fonctions f définies sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$t \longmapsto f(t) = t\mathrm{e}^{-0,6t} + K\mathrm{e}^{-0,6t} = \mathrm{e}^{-0,6t}(t + K), \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

d. En particulier la fonction v, est de cette forme :
$v(t) = \mathrm{e}^{-0,6t}(t + K)$ et vérifie $v(0) = 12$.
Or $v(0) = \mathrm{e}^{-0,6\times 0}(0 + K) = 12 \iff 0 + K = 12 \iff K = 12$.
Conclusion : $v(t) = (12 + t)\mathrm{e}^{-0,6t}$.

2. **a.** Puisque v est une solution de (E), elle vérifie donc $v'(t) + 0,6v(t) = \mathrm{e}^{-0,6t} \iff$
$v'(t) = \mathrm{e}^{-0,6t} - 0,6v(t) \iff v'(t) = \mathrm{e}^{-0,6t} - 0,6(12 + t)\mathrm{e}^{-0,6t} \iff$
$v'(t) = \mathrm{e}^{-0,6t}(1 - 7,2 - 0,6t) = \mathrm{e}^{-0,6t}(-6,2 - 0,6t)$.

b. Avec l'écriture $v(t) = 12\mathrm{e}^{-0,6t} + \dfrac{1}{0,6} \times \dfrac{0,6t}{\mathrm{e}^{0,6t}}$, on a :

- $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,6t} = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} 12\mathrm{e}^{-0,6t} = 0$;

- $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{0,6t}{\mathrm{e}^{0,6t}} = 0$ (puissances comparées au voisinage de plus l'infini) et ensuite $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{0,6}\dfrac{0,6t}{\mathrm{e}^{0,6t}} = 0$.

  Finalement par somme de limites : $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 0$ (ce qui est rassurant : le chariot va s'arrêter).

c. Puisque $v'(t) = \mathrm{e}^{-0,6t}(-6,2-0,6t)$ et comme $\mathrm{e}^{-0,6t} > 0$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$, le signe de $v'(t)$ est celui de $(-6,2-0,6t)$.

- $-6,2-0,6t > 0 \iff -6,2 > 0,6t \iff -62 > 6t \iff -\dfrac{62}{6} > t \iff t < \dfrac{62}{6}$ soit enfin $t < \dfrac{31}{3}$; v est donc croissante sur $\left[-\infty\ ;\ -\dfrac{31}{3}\right[$; dans le cadre de l'exercice puisque $t \geqslant 0$ ceci ne peut arriver, donc
- $-6,2-0,6t < 0 \iff t > -\dfrac{62}{6}$, soit en fait pour $t \geqslant 0$, donc v est décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ de 12 à 0.

d. D'où le tableau de variation suivant :

x	0	α	$+\infty$
$v'(t)$		$-$	
v	12	1	0

Sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, la fonction v continue, car dérivable est strictement décroissante de 12 à 0 ; comme $1 \in]0\ ;\ 12]$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires un réel unique $\alpha \in]0\ ;\ +\infty[$ tel que $v(\alpha) = 1$.

La calculatrice montre que :

$v(4) \approx 1,5$ et $v(5) \approx 0,85$, donc $4 < \alpha < 5$;

$v(4,6) \approx 1,05$ et $v(4,7) \approx 0,995$, donc $4,6 < \alpha < 4,7$; à 0,1 près on prend $\alpha \approx 4,7$.

3. D'après la question précédente la vitesse descend à 1 m/s au bout de 4,7 s. Le système d'arrêt se déclenchera donc au bout de 4,7 s.

Partie C

1. Calcul de l'intégrale : $d(t) = \displaystyle\int_0^t (12+x)\mathrm{e}^{-0,6x}\,\mathrm{d}x$:

Avec
$$\left\{\begin{array}{ll} u(x) = 12 + x & v'(x) = \mathrm{e}^{-0,6x} \\ u'(x) = 1 & v(x) = -\dfrac{1}{0,6}\mathrm{e}^{-0,6x} \end{array}\right.,$$
et toutes ces fonctions étant continues car dérivables sur $[0\ ;\ t]$, on peut intégrer par parties :

Rappel : $\boxed{\displaystyle\int_0^t u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_0^t - \int_0^t u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x}$.

Donc $d(t) = \left[-(12+x)\times\dfrac{1}{0,6}\mathrm{e}^{-0,6x}\right]_0^t - \displaystyle\int_0^t -\dfrac{1}{0,6}\mathrm{e}^{-0,6x}\,\mathrm{d}x$.

Soit $d(t) = \left[-(12+x)\times\dfrac{1}{0,6}\mathrm{e}^{-0,6x}\right]_0^t + \displaystyle\int_0^t \dfrac{1}{0,6}\mathrm{e}^{-0,6x}\,\mathrm{d}x =$

$\left[-(12+x)\times\dfrac{1}{0,6}\mathrm{e}^{-0,6x}\right]_0^t - \dfrac{1}{0,6}\left[\dfrac{1}{0,6}\mathrm{e}^{-0,6x}\right]_0^t = \left[-(12+x)\times\dfrac{1}{0,6}\mathrm{e}^{-0,6x} - \dfrac{1}{0,36}\mathrm{e}^{-0,6x}\right]_0^t$.

Or $\dfrac{1}{0,6} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$ et $\dfrac{1}{0,36} = \dfrac{100}{36} = \dfrac{4\times 25}{4\times 9} = \dfrac{25}{9}$.

Soit $d(t) = \left[-(12+x)\times\dfrac{5}{3}\mathrm{e}^{-0,6x}\right]_0^t - \left[\dfrac{25}{9}\mathrm{e}^{-0,6x}\right]_0^t = \left[-\mathrm{e}^{-0,6x}\left(\dfrac{5(12+x)}{3} + \dfrac{25}{9}\right)\right]_0^t =$

$-\mathrm{e}^{-0,6t}\left(20 + \dfrac{5t}{3} + \dfrac{25}{9}\right) + 20 + \dfrac{25}{9} = \mathrm{e}^{-0,6t}\left(-\dfrac{5}{3}t - \dfrac{205}{9}\right) + \dfrac{205}{9}$.

2. On a vu que la vitesse du chariot est à peu près égale à 1 m/s au bout de 4,7 s. La distance parcourue par le chariot au moment du déclenchement de l'arrêt est donc $d(4,7) = \mathrm{e}^{-0,6\times 4,7}\left(-\dfrac{5}{3}\times 4,7 - \dfrac{205}{9}\right) + \dfrac{205}{9} \approx 20,95$ (m) au centimètre près.

Le dispositif s'arrêt se déclenche quand le chariot a parcouru environ 20,95 m.